OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 15.02.2015
CLASA A X- A

SUBIECTUL III

Fie $z_1, z_2, z_3 \in C$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ și $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Demonstrați că $|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = 2$.

prof. Nicolae Mușuroia

Rezolvare:

Obținem $(z_1 + z_2 + z_3)^2 = 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)$ (1).....1p

Din $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ rezultă $\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2} = \frac{\overline{z_1^2}}{z_1^2 \overline{z_1^2}} + \frac{\overline{z_2^2}}{z_2^2 \overline{z_2^2}} + \frac{\overline{z_3^2}}{z_3^2 \overline{z_3^2}} = \left(\overline{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\right) = 0$...2p

Deci $z_1^2 z_2^2 + z_2^2 z_3^2 + z_3^2 z_1^2 = 0$. Rezultă că $(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)^2 = 2 z_1 z_2 z_3 (z_1 + z_2 + z_3)$.....1p

Obținem, de aici că $|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|^2 = 2|z_1 z_2 z_3 (z_1 + z_2 + z_3)| = 2|(z_1 + z_2 + z_3)|$.....1p

Deci $|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|^4 = 4|z_1 + z_2 + z_3|^2 \overset{(1)}{=} 8|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| \Rightarrow |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|^3 = 8$, deci

$|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| = 2$.....2p